**3.3. Алгоритм симплекс-метода с искусственным базисом**

Неравенства могут быть нескольких типов. Эти различия имеют непосредственное логическое значение при построении моделей и решении задач. В ряде случаев возникает необходимость применения особых приемов решения задач линейного программирования. Начнем изложение с формулировки четырех типов неравенств (ограничений, уравнений).

Первый тип неравенства записывается как

а1 х2+ …+anхn b. Это так называемое ограничение «сверху». Например, производство продукции не должно превышать определенной величины. В землеустроительных задачах это ограничение фигурирует всегда, когда затрагивается положение о размерах площадей. Они всегда ограничены и больше не будут.

Второй тип ограничений формулируется так:

а1х1+ а2х2+….+ anхn b

Это неравенство называется ограничением «снизу». Например, поголовье животных, выход продукции, площади должны быть больше (или равны) заданной величине.

Третий тип ограничений записывается

а1х1+ а2х2+…. +anхn=b

Это выражение называют «жестким», это строгое уравнение. Например, нужно показать в задаче, что площади посевов или многолетних насаждений, или поголовье скота, не могут меняться. Наличие такого рода ограничений в задачах линейного программирования нежелательно, ибо одним из важнейших условий этого математического направления является гибкость всей конструкции.

Четвертый тип ограничений записывается так:

а1х1+ а2х2+…. +anхn b

Это означает, что левая часть по отношению к правой может быть меньше, больше, или равна. Это самое гибкое ограничение. Оно может быть записано в виде а1х1+ а2х2+….+anхn b. Например, площадь пашни после трансформации может быть больше, или меньше, или равна заданной величине.

Для решения задач симплексным методом необходимо привести неравенства в канонический вид, т.е. неравенства преобразовать в уравнения, или другими словами -превратить в равенства. Для этого вводится дополнительная переменная, имеющая своей целью сравнять левую часть ограничения с правой. В разные типы ограничений дополнительная переменная вводится с разными знаками. Дополнительная переменная записывается как хn+1 и перед ней может стоять как плюс + хn+1, так и минус - хn+1.

В первый тип ограничений нужно вводить дополнительную переменную со знаком +, тогда левая часть становится равной правой

а1х1+ а2х2+….+ anхn+xn+1 =b

Отметим экономические значение дополнительной переменной. Она представляет собой недоиспользованный ресурс, ее единица измерения совпадает с единицей измерения ресурса b.

Во втором типе ограничения дополнительная переменная вводится со знаком минус, в третий тип ограничений вводить дополнительную переменную нет нужды, а в четвертый ее вводят и со знаком плюс, и со знаком минус.

Запишем все ограничения с дополнительными переменными

 I -тип а1х1 + а2х2 +….+anхn +Хn+1 =b

 II- тип а1х1 + а2х2 +….+anхn -Хn+1 =b

III- тип а1х1 + а2х2 +….+anхn =b

IV- тип а1х1 + а2х2 +….+anхn +Хn+1-Хn+1 =b

В симплексной таблице в качестве основных (базисных) неизвестных выступают дополнительные переменные, а в графу «свободные члены» размещают ресурсы b. Запишем четыре типа ограничений в симплексной таблице (табл.3.10).

Таблица 3.10

Четыре типа ограничений в симплексной таблице

Тип ограничения Основные неизвестные Свободные члены Не основные неизвестные

 Х1 Х2 …… Хn Хn+1

I +Хn+1 в a1 a2 …. an

II -Хn+1 в a1 a2 …. an

III в a1 a2 …. an

IV +Хn+1 в a1 a2 …. an -1

Проанализируем содержание табл... Здесь основные неизвестные равны свободным членам, т.е. +Хn+1 = b, -XnH=b, в третьем ограничении свободная клеточка равна b, а в четвертой строчке +Хn+1 = b. По первой и четвертой строчкам все обычно, а вот по второй и третьей строкам возникают вопросы.

По второй строке -Хn+1 = b, такая запись не соответствует требованиям математики. Отрицательная величина -Хn+1 не может равняться положительной величине b, это недопустимо.

По третьей строке основная неизвестная отсутствует, такая запись невозможна.

В связи с этими затруднениями предлагается ввести так называемую искусственную переменную y, присвоить ей оценку “М” и назвать процедуру решения задачи симплексным методом с искусственным базисом. По этому методу во IIи IIIтипы ограничений вводится искусственная переменная. В математическом отношении это символ, прием, позволяющий выйти из затруднительного положения. В экономическом плане искусственная переменная никакой нагрузки не несет и, если она остается до конца решения задачи, то объяснить ее назначение невозможно.

Перепишем IIи IIIтипы ограничений ñ èñêóññòâåííîéïåðåìåííîé

II - тип а1х1+ а2х2+…. +anхn -Хn+1+y =b

III- тип а1х1+ а2х2+…. +anхn +y =b

 Введем искусственную переменную в симплексную таблицу в качестве основной неизвестной (табл.3.11).

Таблица 3.11

Симплексная таблица с искусственными неизвестными

Тип ограничений Основная неизвестная Свободные члены Не основные неизвестные

 X1 X2 …. Xn Хn+1

II y b a1 a2 …. an -1

III y b a1 a2 …. an 0

 В этой таблице y=b, задачу можно решать. Однако нужно помнить, что у - это математический символ, не может равняться действительной величине. Поэтому у из задачи нужно вывести. Оценка М, которая придается у, является весьма большой величиной и превышает любое рядом размещенное число. Смысл задачи сводится к тому, чтобы у - искусственные переменные, вывести из задачи и приравнять нулю.

Есть некоторые особенности алгоритма решения задачи с искусственным базисом. Алгоритм решения задачи симплексным методом с искусственным базисом рассмотрим на примере.

В 3.1 «Симплексный метод» разбиралась задача (стр.30). Напомним ее условия: выделяются ресурсы (пашня 1300 га, сенокосы и пастбища 700 га, трудовые ресурсы 40000 чел/дн, деньги - 300 000 тенге). Нужно определить соотношение посевов зерновых и кормовых культур, поголовье крупного рогатого скота и свиней. Цель - максимизация чистого дохода.

 Ранее была составлена система неравенств: (§3.1)

1. По пашне: Х1 + Х2 + Х3 + Х4 1300

2. По зерновым культурам: Х1 + Х2 1000

3. По трудовым ресурсам:

5Х1 + 5Х2 + 50Х3 + 10Х4 +100Х5 + 50Х6 40000

4. По денежно –материальным ресурсам:

 100Х1 + 100Х2 + 300Х3 + 50Х4 + 400Х5 + 200Х6 300 000

5. По кормам для крупного рогатого скота (в кормовых единицах):

 35Х5 4000+20Х2 + 50Х3 + 25Х4

6. По кормам для свиней:

 18Х6 20Х2 + 50Х3 + 25Х4

Целевая функция:

 Z = 100Х1 + 150Х5 + 120Х6 max

Изменим условия задачи. В первом ограничении вместо ограничения введем ограничение жесткое, строго рaвно. Во втором ограничении вместо введем ограничение второго типа . Перепишем два новых ограничения:

1. По пашне: Х1 + Х2 + Х3 + Х4 = 1300

2. По зерновым культурам: Х1 + Х2 1000

 А теперь приведем новую систему неравенств в канонический вид, введем дополнительные и искусственные переменные (у):

1. Х1 + Х2 + Х3 + Х4 +y1 = 1300

2. Х1 + Х2 -Х11 +y2 = 1000

3. 5Х1 + 5Х2 + 50Х3 + 10Х4 +100Х5 +50Х6 +Х7 =40000

4. 100Х1 + 100Х2 + 300Х3 + 50Х4 +400Х5 +200Х6 +Х8 = 300000

5. -20Х2 - 50Х3 - 25Х4 + 35Х5 +Х9 = 4000

6. -20Х2 - 50Х3 - 25Х4 + 18Х6 + Х10 = 0

Z =100Х1 + 150Х5 + 120Х6 max

В полученной системе уравнений имеется 6 основных переменных (Х1-Х6), четыре дополнительных с плюсом (Х7 - Х10), с минусом (Х11) и две искусственных (у1 - у2).

Для удобства запишем полученную систему в виде табл.3.12. Напомним, что дополнительные переменные имеют оценку нулевую, а искусственные - оценку М.

Таблица 3.12

Система основных, дополнительных и искусственных переменных

№

 Основные переменные Дополнительные переменные Искусственные переменные Ресурс

 Х1 Х2 Х3 Х4 Х5 Х6 Х7 Х8 Х9 Х10 Х11 У1 У2

1 1 1 1 1 1 1300

2 1 1 -1 1 1000

3 5 5 50 10 100 50 1 40000

4 100 100 300 50 400 200 1 300000

5 -20 -50 -25 35 1 4000

6 -20 -50 -25 18 1 0

 100 0 0 0 150 120 0 0 0 0 0 М М -

 Используя полученную информацию, составим первую симплексную таблицу 3.13.

В симплексной таблице в столбец основных неизвестных входят искусственные переменные, дополнительные переменные. Их оценки, соответственно, М и О. В качестве не основных неизвестных выступают основные переменные и дополнительные с отрицательным знаком.

Этот алгоритм предусматривает особый расчет коэффициентов целевой строки. Коэффициент (оценка) каждой переменной, оставшейся в числе не основных неизвестных, равен Cj-Zj:

гдеZj- сумма построчных произведений коэффициентов столбца j- й переменной на оценку соответствующих переменных, находящихся в числе основных неизвестных;

Cj- оценка j - й переменной.

Для удобства расчетов дополним симплексную таблицу двумя строчками.

Таблица 3.13.

Первая симплексная таблица (с искусственным базисом)

Оценки базисных переменных Основные переменные Свободные члены Не основные неизвестные

 Х1 Х2 Х3 Х4 Х5 Х6 Х11

М У1 1300 1 1 1 1

М У2 1000 1 1 -1

0 Х7 40000 5 5 50 10 100 50

0 Х8 300000 100 100 300 50 400 200

0 Х9 4000 -20 -50 -25 35

0 Х10 0 -20 -50 -25 18

- Z 0 100 0 0 0 150 120 0

 Cj-Zj 0 -100 0 0 0 -150 -120 0

 2300M 2M 2M M 0 0 0 -M

Рассчитаем строчки по формуле Cj-Zj Столбец свободных членов равен: 1300М+1000М+4000\*0+300000\*0+4000\*0=2300М

Столбец Х1 =1\*М+1\*М+0\*5+0\*100=2М

Аналогично, зачастую устно, рассчитываются остальные коэффициенты по строке Zj. Обычный алгоритм симплексного метода дополняется следующими правилами, связанными с определением столбца главного элемента. Главный элемент находится в столбце, имеющем минимальную оценку при расчете задач на максимум. При этом рассматриваются оценки как нижней, так и верхней строчки. Вначале анализируются оценки нижней строчки. Там, где имеется наибольшая оценка по (М), там и размещается главный столбец (при решении задач на min). Если имеется два одинаковых значения по (М), то анализируются оценки первой строки. Преимущество отдается тому столбцу, где оценка меньше по абсолютному значению.

В рассматриваемом примере в нижнем ряду две одинаковых оценки 2М при Х1и Х2. В верхнем ряду оценки -100 и 0.

В план входит Х1, расчет узкого места показывает, что Х1вводится вместо у1. Последняя выводится из задачи и приравнивается нулю. На следующей итерации из числа базисных неизвестных выводится у2. В дальнейшем задача решается по обычному алгоритму симплексного метода.